V/P1

P 1 *Să se arate că numărul*

$$N = 2013^{2017} + 2014^{2017} + 2015^{2017} + 2016^{2017}$$

nu este pătrat perfect.

Marcel Şerban

R. 1: Avem. $2017 = 4k + 1$ (1p)

$U(2013^{2017}) = U(3^{2017}) = 3$, (1p) $U(2014^{2017}) = U(4^{2017}) = 4$, (1p) $U(2015^{2017}) =$ câte 1p ⟹ 4p

5, $U(2016^{2017}) = 6$ (1p) de unde deducem că

(1p) $U(N) = U(3 + 4 + 5 + 6) = 8$, deci nu poate fi pătrat perfect. ■ 1p + 1p ⟹ 2p

(1p) (1p)

V/12.

Un elev a scris pe caiet 12 numere naturale consecutive.
Din greșeală a șters un număr.
Aflați numărul care a fost șters, știind că suma numerelor rămase pe caiet este 21.995.

Soluție

Numerele consecutive: $n, n+1, n+2, \ldots, n+11$ au suma $12n+66$ (1p)

a) Dacă s-a șters primul număr „n" rămânem cu cea mai mare sumă $11n+66$ (1p)

b) Dacă s-a șters ultimul număr „$n+11$" rămânem cu cea mai mică sumă: $11n+55$ (1p)

Deci $11n+55 \leq 21995 \leq 11n+66 \;|-55 \Rightarrow$

$11n \leq 21940 \leq 11n+11$

Din $11n \leq 21940 \Rightarrow n \leq 1994{,}5$ cu $n \in N$ (1) (1p)

Din $11n+11 \geq 21940 \Rightarrow 11n \geq 21929 \Rightarrow n \geq 1993{,}5$ (2), $n \in N$ (1p)

Din (1) și (2) obținem $\boxed{n = 1994}$ (1p)

Cele 12 numere sunt:

1994, 1995, 1996, ... 2005, care au

suma $1994+1995+\ldots+2005 = 23994$

A fost șters numărul: $23994-21995=1999$ (1p)

Deci nr. șters este 1999

Vasile Șerdean
Gherla

Is 5

V/P3

P 1 *a) Să se arate că* 15 *şi* 225 *se pot scrie fiecare ca sumă de 4 pătrate perfecte.*

b) Să se arate că 15^n *se poate scrie ca sumă de 4 pătrate perfecte pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$.

Marcel Şerban

R. 1: *a)* $15 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$, $225 = 14^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2$ ← 1,5p + 1,5p

b) dacă $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $15^n = 15^{2k+1} = 15^{2k} \cdot 15 = 15^{2k} \cdot (3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2) = (3 \cdot 15^k)^2 + (2 \cdot 15^k)^2 + (15^k)^2 + (15^k)^2$ ← 2p

dacă $n = 2k+2$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $15^n = 15^{2k+2} = 15^{2k} \cdot 15^2 = 15^{2k} \cdot (14^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2)$ ■ $= (14 \cdot 15^k)^2 + (4 \cdot 15^k)^2 + (3 \cdot 15^k)^2 + (2 \cdot 15^k)^2$ ← 2p

V/P4

Clasa a V-a

Să se determine numerele naturale prime care pot fi scrise atât ca suma a două numere naturale prime cât şi ca diferenţa a două numere naturale prime.

prelucrare prof. Gheorghe Lobonţ, *Colegiul Naţional „Emil Racoviţă" Cluj-Napoca*

Soluție: Căutăm numerele naturale prime p, q, r, s și t astfel încât: $p = q + r = s - t$.

Deoarece p, q, r, s și t sunt numere naturale prime avem $q \geq 2$ și $r \geq 2$ deci $p \geq 5$ și $r = t = 2$. 1p

Dacă q, r, s și t ar fi toate impare atunci p ar fi un număr par mai mare strict decât 5 ceea ce este imposibil.

Prin urmare căutăm numerele naturale prime p, q și s astfel încât: 1p

$p = q + 2 = s - 2$.

Observăm că $p = 5, q = 3$ și $s = 7$ este soluție. 1p

Vom demonstra că aceasta este singura soluție. Căutăm trei numere naturale prime impare q, p și s cu diferențele $p - q = 2$ și $s - p = 2$ respectiv cu $q > 3$. Fie $q = 2k+1$ cu $k \in \mathbb{N}^*$, și prin urmare $p = 2k+3$ și $s = 2k+5$. 1p

Cazul 1: Dacă restul împărțirii lui $q = 2k+1$ la 3 este 0 (zero) rezultă că $q \,\vdots\, 3 \Rightarrow q$ este un număr compus și nu există soluție în acest caz. 1p

Cazul 2: Dacă restul împărțirii lui $q = 2k+1$ la 3 este 1 atunci restul împărțirii lui $p = 2k+3$ la 3 este 0 (zero) $\Rightarrow p \,\vdots\, 3 \Rightarrow p$ este un număr compus și nu există soluție în acest caz. 1p

Cazul 3: Dacă restul împărțirii lui $q = 2k+1$ la 3 este 2 atunci $s = 2k+5$ este multiplu de 3 deci s este un număr compus și nu există soluție în acest caz. 1p