Criteriul „cleștelui” în calculul limitelor de șiruri integrale

Am selectat câteva probleme de calcul al limitelor de șiruri integrale care se rezolvă folosind criteriul „cleștelui” și care au fost date la diferite concursuri și examene.

Teoremă (criteriul „cleștelui”). Fie (x_n), (u_n), (v_n) trei șiruri de numere reale care satisfac condițiile:

1) $u_n \le x_n \le v_n,\ \forall n \ge n_0,\ n_0$ fixat;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = a.$

Atunci șirul (x_n) are limită și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

Problema 1. Se consideră șirul $(I_n)_{n\ge1},\ I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}dx,\ n \in \mathbb{N}^*$

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n.$ *(Variante Bacalaureat)*

Soluție: Avem

$$0 \le I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}dx \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Folosind criteriul „cleștelui” rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0.$

Problema 2. Se consideră funcția $f:(-1,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$

Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 f\left(x^n\right)dx.$

Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0.$

(Bacalaureat M1, 2020)

Soluție: $I_n = \int_0^1 f\left(x^n\right)dx = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^{3n}+1}}dx,$

Avem

$$0 \le \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^{3n}+1}}dx \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0,$ rezultă conform criteriului „cleștelui” că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0.$

Problema 3. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 [nx]e^x dx.$

Soluție: $nx-1<[nx]\le nx \Rightarrow (nx-1)e^x < [nx]e^x \le nxe^x$

$$\Rightarrow \int_0^1 (nx-1)e^x dx < \int_0^1 [nx]e^x dx \le \int_0^1 nxe^x dx$$

$$\Rightarrow n-e+1< \int_0^1 [nx]e^x dx \le n \Rightarrow \frac{n+1-e}{n} < \frac{1}{n}\int_0^1 [nx]e^x dx \le 1.$$

Din criteriul „cleștelui” rezultă

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 [nx]e^x dx = 1.$

Problema 4. Se consideră șirul $(I_n)_{n\ge 1}$, definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{\ln(x^n+1)}{x+1}dx,$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n.$

(Variante Bacalaureat)

Soluție: Folosim inegalitatea

$$\ln(1+x) \le x, \ \forall x>-1.$$

Avem

$$\ln(x^n+1) \le x^n, \ \forall x\in[0,1],$$

de unde

$$\frac{\ln(x^n+1)}{x+1} \le \frac{x^n}{x+1} \le x^n.$$

Atunci

$$0 \le I_n = \int_0^1 \frac{\ln(x^n+1)}{x+1}dx \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1},$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0.$

Problema 5. Fie $a>0.$ Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 \frac{x^n}{a+x^n}dx.$

Caz particular:

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx.$ *(Teste grilă UTCN)*

Soluție: $n\int_0^1 \frac{x^n}{a+x^n}dx = \int_0^1 x\frac{\left(a+x^n\right)'}{a+x^n}dx$

$$= \int_0^1 x\left[\ln\left(a+x^n\right)\right]'dx$$

$$= x\ln\left(a+x^n\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \ln\left(a+x^n\right)dx$$

$$= \ln\left(a+1\right) - \int_0^1 \ln\left[a\left(1+\frac{x^n}{a}\right)\right]dx$$

$$= \ln\left(a+1\right) - \ln a - \int_0^1 \ln\left(1+\frac{x^n}{a}\right)dx$$

$$= \ln\frac{a+1}{a} - \int_0^1 \ln\left(1+\frac{x^n}{a}\right)dx.$$

$$\left|\int_0^1 \ln\left(1+\frac{x^n}{a}\right)dx\right| \le \int_0^1 \left|\ln\left(1+\frac{x^n}{a}\right)\right|dx = \int_0^1 \left(1+\frac{x^n}{a}\right)dx \le \int_0^1 \frac{x^n}{a}dx = \frac{1}{a\left(n+1\right)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a\left(n+1\right)} = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \ln\left(1+\frac{x^n}{a}\right)dx = 0 \text{ (criteriul majorării).}$$

Rezultă

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 \frac{x^n}{a+x^n}dx = \ln\frac{a+1}{a}.$$

Problema 6. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{x^n}dx.$ *(Olimpiada județeană,2013)*

Soluție: $e^{x^n} \ge 1,\ \forall x\in[0,1] \;\Rightarrow\; \int_0^1 e^{x^n}dx \ge \int_0^1 dx = 1.$

Folosind inegalitatea $e^x \le 1+3x,\ \forall x\in[0,1]$, rezultă $e^{x^n} \le 1+3x^n,\ \forall x\in[0,1].$

Avem

$$\int_0^1 e^{x^n}dx \le \int_0^1 \left(1+3x^n\right)dx = x\Big|_0^1 + 3\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = 1+\frac{3}{n+1}.$$

Așadar

$$1 \le \int_0^1 e^{x^n} dx \le 1+\frac{3}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_0^1 e^{x^n} dx = 1.$$

Problema 7. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 \ln\left(1+e^{nx}\right)dx.$

(Teste grilă UTCN, 2019, pb.527)

Soluție: Fie $I_n = \int_0^1 \ln\left(1+e^{nx}\right)dx.$

$$I_n \ge \int_0^1 \ln e^{nx} dx = \int_0^1 nx dx = \frac{n}{2}. \qquad (1)$$

Pe de altă parte avem

$$I_n = \int_0^1 \ln e^{nx}\left(e^{-nx}+1\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left[\ln e^{nx} + \ln\left(1+e^{-nx}\right)\right]dx$$

$$= \int_0^1 nx dx + \int_0^1 \ln\left(1+e^{-nx}\right)dx$$

$$= \frac{n}{2}+\int_0^1 \ln\left(1+e^{-nx}\right)dx \le \frac{n}{2}+\int_0^1 \ln 2 dx = \frac{n}{2}+\ln 2. \qquad (2)$$

Am folosit faptul că $e^{-nx} \le 1, \ \forall x \in [0,1].$

Din (1) și (2) avem

$$\frac{n}{2} \le I_n \le \frac{n}{2}+\ln 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{n}I_n \le \frac{1}{2}+\frac{\ln 2}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}I_n = \frac{1}{2}.$$

Problema 8. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(x^n+e^{\cos x}\right)dx.$ *(G.M. nr.5, 2016)*

Soluție: Fie $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(x^n+e^{\cos x}\right)dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left[e^{\cos x}\left(\frac{x^n}{e^{\cos x}}+1\right)\right]dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{x^n}{e^{\cos x}}\right)dx$$

$$= \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{x^n}{e^{\cos x}}\right)dx = \frac{\sqrt{2}}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{x^n}{e^{\cos x}}\right)dx.$$

Avem

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{x^n}{e^{\cos x}}\right)dx\right| \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|\ln\left(1+\frac{x^n}{e^{\cos x}}\right)\right|dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{x^n}{e^{\cos x}}\right)dx$$

$$\le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^n}{e^{\cos x}}dx \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n dx = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} = 0,$ pe baza criteriului majorării rezultă

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{x^n}{e^{\cos x}}\right)dx = 0, \text{ de unde } \lim_{n\to\infty} I_n = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Problema 9. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n \frac{\operatorname{arctg} x}{\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+x+1}dx.$ *(G.M. nr.3, 2019)*

Soluție: Fie $I_n = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{\operatorname{arctg} x}{\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+x+1}dx$

$$= \int_0^n \frac{\operatorname{arctg} x}{(n-1)x^2+nx+n}dx \le \frac{\pi}{2}\int_0^n \frac{dx}{(n-1)x^2+nx+n}$$

$$\le \frac{\pi}{2}\int_0^n \frac{dx}{(n-1)x^2+n-1}$$

$$= \frac{\pi}{2(n-1)}\int_0^n \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{\pi}{2(n-1)} \operatorname{arctg} n \le \frac{\pi^2}{4(n-1)}.$$

Am folosit faptul că $\operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R}$ și $nx + n > n - 1, \ \forall x \in [0, n]$.

Avem

$$0 \le I_n \le \frac{\pi^2}{4(n-1)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

Problema 10. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sqrt[n]{1+x} \ln(2+x) dx.$ *(G.M. nr.11, 2016)*

Soluție: Avem $1 \le \sqrt[n]{1+x} \le \sqrt[n]{2}, \ \forall x \in [0,1]$.

Rezultă

$$\ln(2+x) \le \sqrt[n]{1+x} \ln(2+x) \le \sqrt[n]{2} \ln(2+x),$$

de unde

$$\int_0^1 \ln(2+x) dx \le \int_0^1 \sqrt[n]{1+x} \ln(2+x) dx \le \sqrt[n]{2} \int_0^1 \ln(2+x) dx.$$

Din criteriul „cleștelui” și faptul că $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ avem

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sqrt[n]{1+x} \ln(2+x) dx = \int_0^1 \ln(2+x) dx = \ln \frac{27}{4e}.$$

Problema 11. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \sqrt[n]{(x-a)^n + (b-x)^n} dx, \ 0 \le a < b.$

Caz particular:

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sqrt[n]{x^n + (1-x)^n} dx.$ *(Teste grilă UTCN, 2019, pb.526)*

Problemă similară:

Fie $0 \le a < b, \ a, b \in \mathbb{R}$. Calculați $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \sqrt[n]{x^n + (a+b-x)^n} dx.$

(G.M. nr.6-7-8, 2016)

Soluție: $I_n = \int_a^b \sqrt[n]{(x-a)^n + (b-x)^n} dx$

$$= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \sqrt[n]{(x-a)^n + (b-x)^n}\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \sqrt[n]{(x-a)^n + (b-x)^n}\,dx.$$

În a doua integrală facem schimbarea de variabilă

$$x = a+b-y \;\Rightarrow\; dx = -dy.$$

$$x = \frac{a+b}{2} \;\Rightarrow\; y = \frac{a+b}{2}.$$
$$x = b \;\Rightarrow\; y = a.$$

Avem

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \sqrt[n]{(x-a)^n + (b-x)^n}\,dx = \int_{\frac{a+b}{2}}^{a} \sqrt[n]{(b-y)^n + (y-a)^n}\,(-dy)$$
$$= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \sqrt[n]{(b-y)^n + (y-a)^n}\,dy = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \sqrt[n]{(x-a)^n + (b-x)^n}\,dx.$$

Rezultă

$$I_n = 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} \sqrt[n]{(x-a)^n + (b-x)^n}\,dx.$$

Avem

$$I_n \geq 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} \sqrt[n]{(b-x)^n}\,dx = 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} (b-x)\,dx = \frac{3(b-a)^2}{4}. \qquad (1)$$

Pe de altă parte avem

$$I_n = 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} \sqrt[n]{(x-a)^n + (b-x)^n}\,dx \leq 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} \sqrt[n]{(b-x)^n + (b-x)^n}\,dx$$
$$= 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} \sqrt[n]{2(b-x)^n}\,dx$$
$$= 2\sqrt[n]{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} (b-x)\,dx = \frac{3(b-a)^2}{4}\sqrt[n]{2}. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că

$$\frac{3(b-a)^2}{4} \le I_n \le \frac{3(b-a)^2}{4}\sqrt[n]{2}.$$

Conform criteriului „cleștelui” și faptului că $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2} = 1$ rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{3(b-a)^2}{4}.$$

Bibliografie

[1] Liviu Vlaicu: *505 Probleme rezolvate din Testele grilă de matematică pentru admiterea la Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca*, Editura Paralela 45, 2019

[2] Universitatea Tehnică Cluj-Napoca: *Teste grilă de matematică*, Editura U.T. Press, Cluj – Napoca, 2019

[3] Mircea Ganga : *Matematică, manual pentru clasa a XII-a, Elemente de analiză matematică*, Editura Mathpress, 2002

[4] Colecția *Gazeta Matematică*

Profesor **Lucaciu Simona Daniela**,
Colegiul Național „Silvania” Zalău