FUNCȚII CARE ADMIT SAU NU ADMIT PRIMITIVE

Prezentare teoretică:

În clasa a XII-a, la analiză matematică avem capitolul PRIMITIVE. Elevul este pus în fața a trei probleme referitoare la primitive:

Să cunoască:

1) Noțiunea de primitivă
2) Metodele de determinare a primitivelor
3) Probleme de existență a primitivelor

În ceea ce urmează ne vom ocupa de problema existenței primitivelor unei funcții, dar bineînteles aceasta nu se poate realiza fără a cunoaște definiția primitivei și proprietățile acesteia.

Precizez că funcțiile vor fi definite pe un interval J din $\mathbb{R}$.

Definiție: Fie J un interval, $J \subseteq \mathbb{R}$ și $: J \to \mathbb{R}$. Funcția f admite primitive pe J (este primitivabilă) dacă există o funcție $F : J \to \mathbb{R}$ astfel încât să avem:

1) F-derivabilă pe J
2) $F'(x) = f(x), \forall\, x \in J$

Funcția F se numește primitivă a funcției f

Propoziția 1: Dacă F și G sunt două primitive ale aceleași funcții $f : J \longrightarrow \mathbb{R}, J \subseteq \mathbb{R}$ interval, atunci $\exists\, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(x) - G(x) = c,\ \forall\, x \in J$ (două primitive ale aceleași funcții diferă printr-o constantă).

Corolar: Fie $f : J \to \mathbb{R}, J$ interval din $\mathbb{R}$, o funcție care admite o primitivă F. Atunci $\forall\, c \in \mathbb{R}$, funcția $F + c$ este o primitivă a lui f și orice primitivă a lui f este de forma $F + C$.

Observație: Dacă J nu este interval, ci o reuniune de intervale disjuncte, afirmația nu rămâne adevărată.

Contraexemplu: Fie $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0$. Considerăm $F, G: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R},\ F(x) = 1,\ G(x) = sgn\, x, \forall\, x \in \mathbb{R}^*$. Avem $F'(x) = G'(x) = f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^*$, dar $(F - G)(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 2, & x < 0 \end{cases}$ care nu e constantă.

Propoziția 2: Fie $f : J \to \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive. Atunci f are proprietatea lui Darboux (deci f nu are discontinuități de primă speță).

Corolar: Dacă $f : J \to \mathbb{R}$ nu are proprietatea lui Darboux, atunci f nu admite primitive.

Observație: Reciproca este falsă.

Contraexemplu: Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ Funcția f nu admite primitive dar, are proprietatea lui Darboux.

Este bine de stiut urmatorul rezultat:

Funcția$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ are următoarele proprietăți:

1) f admite primitive $\Leftrightarrow a = 0$ (vezi problema 2)
2) f are proprietatea lui Darboux $\Leftrightarrow a \in [-1,1]$

Există o clasă mare de funcții care admit primitive și anume clasa funcțiilor continue.
Teoremă: Fie $f : J \to \mathbb{R}$, o funcție continua, J- interval. Atunci f admite primitive.
Observație: Reciproca este falsă.

<u>Contraexemplu:</u> Fie $f : J \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Funcția f nu este continuă $\left(\exists x_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0\right.$ și $x'_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \to 0$ dar $f(x_n) =$
$= \sin 2n\pi = 0 \to 0$ și $\left.f(x'_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \to 1\right)$, dar f admite primitive.
Deci, avem următoarele incluziuni stricte: $C(J) \subset P(J) \subset Da(J)$, J interval din $\mathbb{R}$

Am notat:
- $C(J) \longrightarrow$ clasa funcțiilor continue pe J
- $P(J) \longrightarrow$ clasa funcțiilor primitivabile pe J
- $Da(J) \longrightarrow$ clasa funcțiilor cu proprietatea lui Darboux

Ne punem firesc întrebarea: Cum arătăm că o funcție admite sau nu admite primitive ?
Modalități de a arăta că o funcție <u>admite primitive:</u>
1) Dacă funcția este continua;
2) Dacă scriem funcția ca o combinație liniară de funcții care admit primitive;
3) Construim efectiv primitiva sa.

Modalități de a arăta că o funcție <u>nu admite primitive:</u>
1) Dacă funcția nu are proprietatea lui Darboux;
2) Dacă imaginea unui subinterval al domeniului de definiție nu este interval;
3) Scriem funcția ca suma dintre o funcție care admite primitive și una care nu admite primitive;
4) Dacă are discontinuități de prima speță;
5) Prin reducere la absurd.

<u>**Aplicații:**</u>

1. Să se arate ca funcția $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ admite primitive.

<u>Soluție:</u> Pornim de la: $\left(x^2 \cos\frac{1}{x}\right)' = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$, de unde
$\sin\frac{1}{x} = \left(x^2\cos\frac{1}{x}\right)' - 2x\cos\frac{1}{x}$. Funcția f se scrie $f(x) = g(x) - 2h(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$ cu $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$g(x) = \begin{cases} \left(x^2\cos\frac{1}{x}\right)', & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$; $h(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.Funcția g admite primitive.

O primitivă a sa este funcția $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, G(x) = \begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Funcția h admite primitive deoarece h este continuă $\left|x\cos\frac{1}{x}\right| = |x|\left|\cos\frac{1}{x}\right| \leq |x| \to 0$. Deci $\lim_{x\to 0} h(x) = h(0)$.

Funcția f admite primitive fiind o combinație liniară de funcții care admit primitive.

2. Funcția $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ admite primitive $\Leftrightarrow$ $a = 0$

<u>Soluție:</u> Scriem funcția $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases} + \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases} = f_1(x) + f_2(x)$

f_1- admite primitive (problema 1)
f_2- admite primitive $\Leftrightarrow$ $a = 0$ (altfel $f(\mathbb{R}) = \{0, a\}$ care nu e interval)
Observație: Mulțimea funcțiilor primitivabile este închisă față de adunare, dar nu este închisă in raport cu înmulțirea(dacă suma a două funcții care admit primitive admite primitive, nu același lucru se întâmplă în cazul înmulțirii).

3. Funcția $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ admite primitive, dar funcția
$f^2(x) = f(x) \cdot f(x) = \begin{cases} sin^2\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ nu admite primitive.

<u>Soluție:</u> $f^2(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos\frac{2}{x}}{2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} - \frac{1}{2}\begin{cases} \cos\frac{2}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = g(x) - \frac{1}{2}h(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

g- nu admite primitive, h- admite primitive $\Rightarrow f^2$- nu admite primitive.

4. Exemplu de funcții care nu admit primitive pe $\mathbb{R}$, dar suma, produsul, respectiv compunerea lor admit primitive pe $\mathbb{R}$.

$f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}; g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$
$(f+g)(x) = 1, (f \cdot g)(x) = 0; (f \circ g)(x) = 1_{\mathbb{R}}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$
$(f+g), (f \cdot g), (f \circ g)$ sunt funcții continue, deci admit primitive.

5. Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \cos x \cdot \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Soluție: $f(x)=\begin{cases}(\cos x-1)\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}+\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}=g(x)+h(x), \forall\, x\in\mathbb{R}$ g este continuă pe $\mathbb{R}$ $\left[\lim_{x\to 0}(\cos x-1)\cdot\sin\frac{1}{x}=0=f(0)\right]\Rightarrow g$ admite primitive; h nu admite primitive $\Rightarrow f$ nu admite primitive.

6. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este derivabilă cu derivată continuă, atunci funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases}f(x)\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$ admite primitive.

Soluție:

$f(x)=\begin{cases}[f(x)-f(0)]\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}+f(0)\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}=g_1(x)+g_2(x), \forall\, x\in\mathbb{R},\ g_1$- continuă

$\left[\lim_{x\to 0} g_1(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\cdot x\sin\frac{1}{x}=f'(0)\cdot 0=0=g_1(0)\right]\Rightarrow \left.\begin{matrix}g_1 - \text{admite primitive}\\ g_2-\text{admite primitive}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$

g —admite primitive.

7. Să se arate că $f(x)=\begin{cases}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ are primitive pe $\mathbb{R}$.

Metoda 1:

$f(x)=\begin{cases}\sin x\cos\frac{1}{x}+\cos x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}=\begin{cases}\sin x\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}+\begin{cases}\cos x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}=g(x)+$
$+h(x), \forall x\in\mathbb{R}.$

g este continuă $\Rightarrow g\ admite\ primitive. Cum\ si\ h\ admite\ primitive (problema\ 5)\Rightarrow f$ admite primitive

Metoda 2:

Pornim de la :$\left[x^2\cos\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]'=2x\cos\left(x+\frac{1}{x}\right)-x^2\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)+\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)$

Scriem $f(x)=\begin{cases}\left[x^2\cos\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]', & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}-2\begin{cases}x\cos\left(x+\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}+\begin{cases}x^2\sin\left(x+\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

f- combinație liniară de funcții care admit primitive $\Rightarrow f$ admite primitive

8. Există funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bijective astfel încât funcția $f\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, să fie primitiva lui f?

Mihai Piticari,RMT

Soluție: Presupunem că există f cu proprietatea din enunț $\Rightarrow f$ are proprietatea lui Darboux(f admite primitive).Deoarece f este si injectivă $\Rightarrow f$ este strict monotonă $\Rightarrow$ $f\circ f$ este strict crescătoare $\Rightarrow\Rightarrow (f\circ f)'(x)>0,), \forall x\in\mathbb{R}$ (derivata funcției $f\circ f$ există deoarece $f\circ f$ este o primitivă) $\Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}\ \Rightarrow f(\mathbb{R})=(0,\infty)\neq\mathbb{R}\Rightarrow f$, *nu este surjectivă. Contradicție ⇒ nu există funcții cu proprietatea din enunț.*

9. Să se arate că nu există bijecție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, derivabilă, astfel încât $f\in\int f\big(f(x)\big)dx$.

<u>Soluție:</u> Presupunem că există f derivabilă și bijectivă astfel încât să fie o primitivă a funcției fof. Deoarece f este derivabilă $\Rightarrow f$ continuă. Cum f este și injectivă $\Rightarrow$ f strict monotonă. Presupunem că f este strict crescătoare (cazul f strict descrescătoare se tratează analog) $\Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Dar $f'(x) = (f°f)(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (f°f)(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Deoarece f este surjectivă $\Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{R}$ astfel încât f(m) $= 0 \Rightarrow f\big(f(x)\big) > f(m), \forall x \in \mathbb{R}. Deoarece\ f este\ strict\ crescatoare \quad \Rightarrow\ f(x) > m, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow Im\ f \subset (m, \infty) \Rightarrow f$ nu e surjectivă. Contradicție.

10. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție strict descrescătoare pe I care admite primitive pe I. Există funcții $g: I \to \mathbb{R}$ care admit primitive pe I astfel încât $g°g = f$?

<u>Soluție:</u> Presupunem că există g cu proprietatea din enunț. Deoarece g admite primitive pe $I \Rightarrow g$ are proprietatea lui Darboux pe I (1). Funcția f este strict descrescătoare pe I $\Rightarrow$ f injectivă $\Rightarrow$ $g°g$ este injectivă $\Rightarrow$ g- injectivă (2);

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ g este strict monotonă $\Rightarrow$ $g°g$ strict crescătoare$\Rightarrow$ f este strict crescătoare. Contradicție. Presupunerea făcută este falsă.

Las cititorilor plăcerea de a rezolva următoarele probleme:

$1^{°}$. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Există funcții $f: I \to \mathbb{R}$ care admit primitive pe I astfel încât $f°f = -1_I$?

$2^{°}$.Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă. Arătați că nu există nicio primitivă $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a lui f astfel încât $f°F$=1_R.

11. Să se arate că dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are primitive pe $\mathbb{R}$, atunci $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = |x|f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ are primitive pe $\mathbb{R}$.

<u>Soluție</u>: $g(x) = \begin{cases} xf(x), & x \geq 0 \\ -xf(x), & x < 0 \end{cases}$. Fie F o primitivă a lui f pe $\mathbb{R} \Rightarrow$ F-derivabilă$\Rightarrow$ F-continuă$\Rightarrow$ $\Rightarrow F$-admite primitive (notez cu T o primitivă a lui F). Atunci $\int xf(x)dx = \int xF'(x)dx = xF(x) - -\int F(x)dx = xF(x) - T(x) + C$. Dacă g admite primitive, primitivele sale sunt de forma:

$$G(x) = \begin{cases} xF(x) - T(x) + c_1, & x \geq 0 \\ -xF(x) + T(x) + c_2, & x < 0 \end{cases}$$

Cum G- derivabilă$\Rightarrow$ G-continuă $\Rightarrow$ G-continuă în $x_0 = 0$ $\Rightarrow$ $G(0-0) = G(0+0) = G(0) \Rightarrow -T(0) + c_1 = T(0) + c_2 \Rightarrow c_1 = 2T(0) + c_2$. Pentru simplificarea scrierii notez c_2=c $\Rightarrow$ $c_1 = 2T(0) + c$

Avem: $G(x) = \begin{cases} xF(x) - T(x) + 2T(0) + c, & x \geq 0 \\ -xF(x) + T(x) + c, & x < 0 \end{cases}$

$$G_s' = \lim_{x \to 0} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = -\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} F(x) + \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{T(x) - T(0)}{x} = -F(0) + T'(0) = -F(0) + F(0) = 0;$$

Analog $G_d'(0) = 0$ $\Rightarrow G$ derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $G'(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow G este$ primitivă a lui g.

Observație: Asemănător se poate rezolva următoarea problemă:

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive pe $\mathbb{R}$. Să se arate ca următoarele funcții admit primitive (($a, b \neq 0$):

1) $f_1(x) = (ax + b)f(x), x \in \mathbb{R}$;
2) $f_2(x) = |ax + b|f(x), x \in \mathbb{R}$;

3) $f_3(x) = f(ax+b), x \in \mathbb{R}$;
4) $f_4(x) = f(|ax+b|), x \in \mathbb{R}$;

12. Să se demonstreze că dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admite primitive, atunci $g(x) = f(x^n), \forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, admite primitive.

Soluție: Fie $F_0: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui f, atunci $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$F(x) = F_0(x) - F_0(0)$ este o primitivă a lui f care se anulează în zero. Pornim de la:

$$\left(\frac{F(x^n)}{x^{n-1}}\right)' = nf(x^n) - \frac{(n-1)F(x^n)}{x^n} \Rightarrow f(x^n) = \frac{1}{n}\begin{cases}\left(\frac{F(x^n)}{x^{n-1}}\right)', x \neq 0 \\ f(0), \quad x = 0\end{cases} +$$

$+\frac{n-1}{n}\begin{cases}\frac{F(x^n)}{x^n}, x \neq 0 \\ f(0), \quad x = 0\end{cases} = \frac{1}{n}f_1(x) + \frac{n-1}{n}f_2(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Arătăm că f_1- admite primitive construid primitiva sa. $F_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_1(x) = \begin{cases}\frac{F(x^n)}{x^{n-1}}, \ x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0\end{cases}$

Deoarece $\lim_{x\to 0} F_1(x) = \lim_{x\to 0}\frac{F(x^n)}{x^{n-1}} = \lim_{x\to 0} x\frac{F(x^n)}{x^n} = \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{y\to 0}\frac{F(y)}{y} = 0 \cdot \lim_{y\to 0}\frac{F(y)-F(0)}{y-0} =$

$= 0 \cdot F'(0) = 0 \cdot f(0) = 0 = F_1(0) \Rightarrow F_1$ este continuă în $x_0 = 0 \Rightarrow F_1$- continuă pe $\mathbb{R}$.
$F_1'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{F_1(x) - F_1(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{F(x^n)}{x^n} = \lim_{y\to 0}\frac{F(y)}{y} = F'(0) = f(0) = f_1(0) \Rightarrow F_1 -$
$-$derivabilă în $x_0 = 0 \Rightarrow F_1$- derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F_1'(x) = f_1(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F_1$ este primitivă a lui f_1.
Funcția f_2 este continuă $\Rightarrow f_2$ admite primitive $\Rightarrow f$ admite primitive fiind combinație liniară de funcții care admit primitive.

BIBLIOGRAFIE: 1) Vasile Arsinte, "Probleme elementare de calcul integral"
Editura Universitatii, Bucuresti, 1995;

2) D.M. Batinetu-Giurgiu, Maria Batinetu-Giurgiu, I.Birchi -Damian — Primitive si integrale, Analiza matimatica XII, Editura Birchi;

3)Dorel Duca, Eugenia Duca, " Culegere de probleme de analiza matematica II"
Editura Gil, Zalau;

4) Dorin Andrica, Nicolae Bisboaca, Ioan Serdan, Manual de matematica-clasa a XII-a M1
Editura Plus, Bucurest

5) Mircea Ganga , Matematică, manual pentru clasa a XII-a, Elemente de analiză matematică, Editura Mathpress, 2002

Profesor **Lucaciu Simona Daniela**,
Colegiul Național „Silvania" Zalău